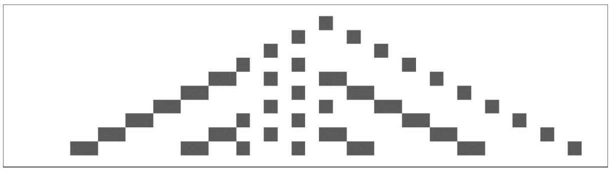
量子ウォークの健気な位相

瀬川悦生 (横浜国立大学)

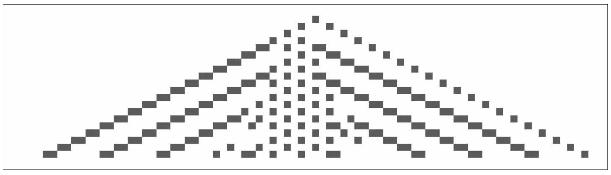
グラフ上の量子ウォークの時間発展はユニタリ作用素によって記述されるので, 初期状態の大きさが 1 であれば, 各時刻の確率分布が定義できます. これによって, 例えば, 1 次元上の格子上の一様な量子ウォークの極限分布が今野関数によって特徴づけられ, 対応するランダムウォークと全く異なる挙動を表すということで, 量子ウォークがここまで盛んに研究されることのスタート地点の 1 つになったのでした [1]. その分布は, 実際には複素数で与えられた各頂点上の時刻 t での確率振幅のノルムの 2 乗で与えらるわけですが, それはこの確率振幅を極座標表示した際の, もちろんその長さの 2 乗をとることに相当します. この際に少し気になるのは, この確率分布には, 極座標表示した際の偏角 (位相) の情報が消えてしまっていることです. 確かに, これまでの時間発展でその位相がおおいに影響を及ぼし活躍した結果として, このような面白い分布が出てくるわけですが, その功労者は, 最後の分布を出す際にぱっと身を引き, 長さだけに委ねるという, そんななんとも健気で愛らしい位相を, 今回は主人公としてみたいと思います.

ある自然数 $k > 2$ をパラメータにもつ, 1 次元格子の各頂点での局所的な時間発展を与える, 2×2 の直交行列で駆動する量子ウォークモデルを考えます. この直交行列は場所に依存していて, 正の場所では C_+, 負の場所では C_- を設置します. (この具体的な表示はこの論文を参照 [2].) 初期状態を原点からある実数値の確率振幅で始めると, 時間発展作用素が直交行列で与えられているので, もちろん, 確率振幅は実数値になります. ですから, 各時刻, 場所の位相は ± 1 のどちらかをとることになります. 下の図 1 は, 上から下に時間発展していて, 各セルが量子ウォークの存在しうる場所のサポートになっていて, 黒いセルが位相 $+1$, 白いセルが位相 -1 に相当しています. こうしてみると, なんらかの規則性のようなものも確認でき, とても楽しい気持ちになります.

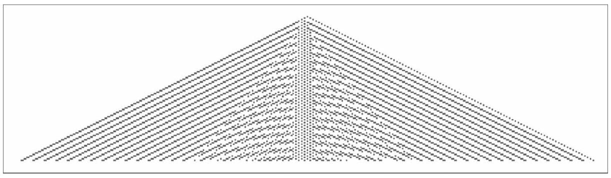
この位相のパターンについて純粋に惹かれるところもありますが, 次にこのグラフの同型問題への応用を簡単に紹介したいと思います. 一般にあるグラフとある別のグラフが同型であることを判別するには計算量がとてもかかる難しい問題とされています. これを量子ウォークを用いて, どうにか改善できないかという研究も幾つか行われています. その中で, よく行われているものが, Grover walk を n ステップまで走らせたときの状態の各成分の値が正の値をとっているものは $+1$ に置き換えて, それ以外は全て 0 にしてできたものに対する固有多項式を比べることによって与えるといったものです. つまりグラフ G とグラフ H が同型かどうかを調べたいときに, グラフ G 上の Grover walk 遷移行列の n 乗のサポートの固有多項式と, グラフ H 上の Grover walk 遷移行列の n 乗のサポートの固有多項式の各係数を見比べて, 異なっていたら非同型であるとするものです. 実は反例は見つかってしまっていますが [3], かなり大きい頂点数まで, n が 3 の場合で逆の成立, つまり, この Grover walk の 3 乗のサポートに関する固有多項式が同じであれば, グラフは同型であることが確認されています [4]. 固有多項式を求めるのは, 頂点数に対して多項式のオーダーなので, かなり速く求まるということで, 着目を浴びました. そこで, 素朴に, n を 3 よりも大きくすれば, もっと可能性があるのではないかということで, 取り組んだのが, 今回の話です. 流石に, 一般のグラ



(a)The phase pattern up to $n = 10$



(b)The phase pattern up to $n = 20$



(c)The phase pattern up to $n = 100$

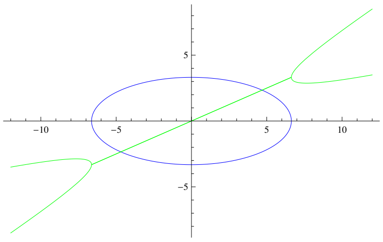
Figure 1: 図 (a),(b), (c) は, それぞれ時刻 $n = 10$, $n = 20$, $n = 100$ までの, 位相の推移 ($k = 20$)

フでは難しいので, n が与えられたときに, そのグラフの内周 (閉路の最小長さ) が真に n よりも小さい場合かつ, 次数が k の正則グラフについて考えました. 行列 A に対して, $S(A)$ を行列 A の正の値のサポートとします. すると, U を Grover walk の遷移行列 U とすると, 我々の興味は $S(U^n)$ なとなるわけですが, (冪が S のカッコの中にあると難しく, 外にあると簡単だと思ってください), それが全て冪が S のカッコの外にあるものたちの線形和で書き表したのが次の公式です.

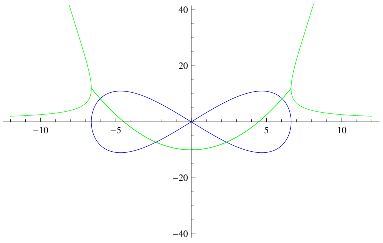
$$S(U^n) = \sum_{j=0}^{n} (\epsilon_j S(U)^j + \tau_j JS(U)^j) + \sum_{j=1}^{n-1} (\epsilon_{-j} JS(U)^j J + \tau_{-j} S(U)^j J)$$

ここで, この主張の面白いところは, この "基底" のような役割をしている, $S(U)^j$, $JS(U)^j$, $JS(U)^j J$, $S(U)^j J$ の前にある係数 ϵ_j, τ_j 達は, 実は, 前述の位相の時刻 n における黒白のパターンで決まるものになっています. すなわち, 図の位相パターンは, ある意味で (ある特殊な場合ですが) グラフが同型か非同型かを判別するための情報を持っているということになるわけです. 具体的な対応付けの方法はここでは書けませんが, とてもシンプルなので, もし興味があればこの論文を参照してください [2]. さらにまた, この $S(U)$ は実は, グラフの Ihara zeta 関数 [5] の同値な表示で知られている所謂 Hasimoto 型表示の中に現れてくるものと完全に一致しています.

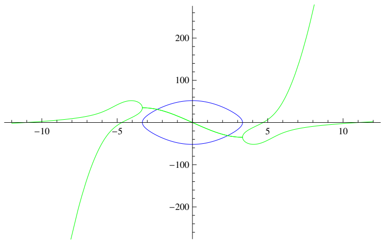
この表現を使うと, $S(U^n)$ の固有値のサポートを明示的に計算することができます. 例えば, 下の図 2 は各 $S(U^n)(n = 1, 2, \ldots, 6)$ において, 緑が固有値を記述する $-k$ から k までの値を持つパラメータを動かしたときの, 固有値の実部, 青が虚部の軌道になっており, 特に虚部においては, n の値に応じて楕円がでてきてたり, レムニスケート (もどき) がでてきており, 大変興味深いです. これらは実は超楕円曲線を描いています. 今回は, このように, 量子ウォークの位相を考える事によっても, おもしろい応用があることの一例を挙げてみました.



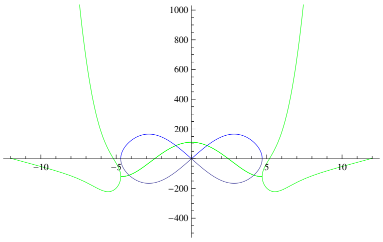
I_1 and R_1 for $k=12$



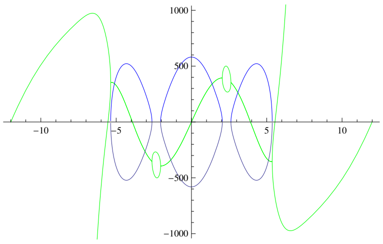
I_2 and R_2 for $k=12$



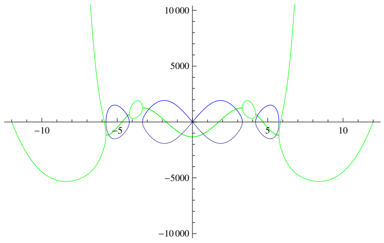
I_3 and R_3 for $k=12$



I_4 and R_4 for $k=12$



I_5 and R_5 for $k=12$



I_6 and R_6 for $k=12$

Figure 2: $S(U^n)$ の固有値のサポート: 横軸は固有値を記述するパラメータ $\mu \in [-k,k]$, 縦軸がそのときの $S(U^n)$ の固有値の実部 $R_n(\mu)$ と虚部 $I_n(\mu)$.

References

[1] Konno, N.: Quantum Walks. In: Lecture Notes in Mathematics: **1954** (2008) pp.309–452, Springer-Verlag, Heidelberg.

[2] Konno, N., Sato, I and Segawa, E.: Phase measurement of quantum walks: application to structure theorem of the positive support of the Grover walk, The Electric Journal of Combinatorics, P2.26 (2019)

[3] Godsil, C., Guo, K., Myklebust, Tor G.J.: Quantum walks on generalized quadrangles, The electronic journal of combinatorics **24** (2017) ♯P4.16.

[4] Emms, D., Hancock, E. R., Severini, S., Wilson, R. C., A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant, Electr. J. Combin. **13** (2006) R34.

[5] Ihara, Y.: On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields. J. Math. Soc. Japan **18** (1966) pp.219–235.